

EUROASIA

Matematik, Mühendislik, Doğa ve Tıp Bilimleri Dergisi
Journal of Mathematics, Engineering, Natural & Medical Science

Araştırma Makalesi

e-ISSN: 2667-6702

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20515191>**Pozitif Tamsayıların Toplamlarında Ortak Bölen Yapısı Üzerine Bir İnceleme**Ferit GÜRBÜZ^{1*} ¹ Kırklareli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, KırklareliSorumlu yazar (Corresponding author) E-mail: feritgurbuz@klu.edu.tr**Makale Tarihiçesi**

Geliş: 03.02.2026

Kabul: 15.03.2026

Anahtar Kelimeler

Aritmetik dizi

Sayıların elastikiyeti

Ortak bölen

Diofantin denklemler

Beal varsayımı

Özet: Bu çalışmada, Beal varsayımı bağlamında genellikle ikincil görülen düşük üs durumları, özellikle 1 ve 2 üsleri, aritmetik diziler ve pozitif tamsayıların yapısal özellikleri çerçevesinde yeniden ele alınmaktadır. Pozitif tamsayıların aritmetik dizi toplamları olarak ifade edilebilirliği, bu temsillerin ortak bölen yapılarıyla olan ilişkisi üzerinden incelenmekte ve klasik diofantin denklemlerle bağlantısı ortaya konulmaktadır. Çalışmada geliştirilen yaklaşım, sayıların aritmetik diziler aracılığıyla sahip olabileceği toplamsal temsillerin varlığını ve çeşitliliğini temel almakta; bu temsillerin hangi durumlarda anlamlı yapısal bilgiler sunduğunu tartışmaktadır. Elde edilen sonuçlar, Beal varsayımı ve Fermat'ın son teoremi ile tutarlı olup, bu problemlere yönelik yeni bir ispat iddiası içermeden, söz konusu denklemlerin aritmetik dizi perspektifinden daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

An Investigation on the Common Divisor Structure of Sums of Positive Integers**Article Info**

Received: 03.02.2026

Accepted: 15.03.2026

Keywords

Arithmetic sequence

elasticity of numbers

common divisor

Diophantine equations

Beal conjecture

Abstract: In this study, the low exponent cases—particularly exponents 1 and 2—which are often regarded as secondary in the context of the Beal conjecture, are reconsidered through the lens of arithmetic progressions and structural properties of positive integers. The representation of positive integers as sums of arithmetic progressions is examined with respect to the resulting common divisor structures, and its connection to classical Diophantine equations is clarified. The proposed approach is based on the existence and diversity of additive representations of integers via arithmetic progressions, and discusses under which conditions these representations yield meaningful structural insights. The results obtained are consistent with both the Beal conjecture and Fermat's *last theorem*, and aim to contribute to the understanding of these problems from an arithmetic progression perspective, without asserting any new proof claims.

1. Giriş

Sayı teorisi, pozitif tamsayıların cebirsel ve aritmetik özelliklerini inceleyen, kökleri Antik Yunan'a kadar uzanan temel bir matematik dalıdır. Özellikle asal sayılar, ortak bölenler, bölünebilme özellikleri ve üs alma işlemleri etrafında şekillenen problemler, hem tarihsel hem de modern matematikte merkezi bir rol oynamıştır. Bu bağlamda en temel sorulardan biri, tamsayı çözümleri aranan denklemlerin hangi koşullar altında çözüme sahip olduğunun belirlenmesidir. Tamsayı çözümleri aranan bu tür denklemler diofantin denklemler olarak adlandırılmakta olup, yüzyıllar boyunca matematikçilerin yoğun ilgisini çekmiş ve sayı teorisinin gelişiminde belirleyici olmuştur [1,2]. Diofantin denklemler içinde özellikle üs alma işlemi içeren ifadeler, çözüm kümelerinin son derece hassas ve kırılğan yapılar sergilemesine neden olur. Bu durumun en çarpıcı örneklerinden biri, Pierre de Fermat tarafından 17. yüzyılda ortaya atılan ve ancak 350 yıl sonra Andrew Wiles tarafından kanıtlanan Fermat'ın son teoremi'dir. Bu teorem, $n > 2$ olmak üzere $x^n + y^n = z^n$ denkleminin sıfırdan farklı tamsayı çözümlerinin bulunmadığını göstererek, üs büyüdükçe diofantin denklemlerin neden dramatik biçimde kısıtlandığını açıkça ortaya koymuştur [3]. Beal varsayımı ise bu sonucu daha geniş bir çerçevede ele alarak, $A^x + B^y = C^z$ biçimindeki denklemlerde ortak asal bölen koşulunun zorunlu olduğunu öne sürmekte ve bu yönüyle Fermat'ın son teoremi'ni kapsayan daha genel bir problem olarak değerlendirilmektedir [5]. Bu tür problemlerde dikkat çeken temel unsur, sayıların çarpansal yapılarının çözümler üzerindeki belirleyici etkisidir. Özellikle asal çarpanların dağılımı ve ortak bölenlerin varlığı, denklemlerin çözülebilirliğini doğrudan etkilemektedir. Bununla birlikte, sayı teorisinde çoğu zaman ikinci planda kalan ancak son derece güçlü bir bakış açısı sunan bir diğer yaklaşım da sayıların toplamsal temsilleridir. Aritmetik diziler aracılığıyla elde edilen bu temsiller, sayıların yalnızca çarpanlara ayrılmasıyla değil, aynı zamanda hangi düzenli toplamlar biçiminde ifade edilebildiğiyle de incelenmesine olanak tanır. Kare sayıların ardışık tek sayıların toplamı olarak yazılabilmesi gibi klasik sonuçlar, toplamsal yapıların çarpansal bilgilerle beklenmedik biçimlerde etkileşime girdiğini göstermektedir [1,4]. Bu çalışmanın temel motivasyonu, sayıların bu toplamsal temsillerini sistematik ve kavramsal bir çerçeve içinde ele alarak, üstel diofantin denklemlerde ortaya çıkan ortak bölen koşullarını farklı bir perspektiften analiz etmektir. Bu amaçla aritmetik diziler ve bu diziler üzerinden tanımlanan elastikiyet kavramı kullanılarak, Beal varsayımı ve Fermat'ın son teoremi gibi klasik problemlere doğrudan bir ispat iddiası taşımadan; ancak bu problemlerin neden doğal ve kaçınılmaz aritmetik kısıtlar içerdiğini açıklamaya yönelik bütüncül bir yaklaşım sunulmaktadır.

2. Ön bilgiler ve temel kavramlar

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan kavramlar ayrıntılı biçimde tanıtılmaktadır. Amaç yalnızca tanım vermek değil; her kavramın sayı teorisindeki yerini, tarihsel bağlamını ve bu çalışmada neden gerekli olduğunu açık biçimde ortaya koymaktır. Bu nedenle her tanımın ardından açıklayıcı örnekler verilmekte ve ilgili literatüre doğrudan atıflar yapılmaktadır. Böylece ilerleyen bölümlerde sunulan ana sonuçların hangi matematiksel zemine dayandığı netleştirilmektedir.

2.1. Diofantin denklemler

Tamsayı katsayılı olup çözümleri tamsayılarda aranan denklemlere diofantin denklemler denir. Bu denklemler sayı teorisinin temelini oluşturur ve asal sayılar, ortak bölenler ve çarpanlara ayırma ile doğrudan ilişkilidir [3,4].

Örnek 2.1.1. (Parametrik Pisagor üçlüleri ve aritmetik yapı)

Pisagor denklemi

$$x^2 + y^2 = z^2$$

tam sayı çözümleri bakımından klasik olmakla birlikte, çözümlerin yapısı belirli aritmetik düzenlilikler içerir. Özellikle, $m > n$ olmak üzere aralarında asal ve zıt pariteli iki pozitif tamsayı seçildiğinde,

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

biçiminde verilen üçlüler, ilkel Pisagor üçlülerini tanımlar. Bu parametrelemede, x ve z sayıları

$$z - x = 2n^2$$

eşitliği ile birbirine bağlı olup, bu fark sabit tutularak elde edilen üçlüler, z bileşeninin belirli aritmetik diziler üzerinde ilerlediğini göstermektedir. Örneğin $n = 1$ sabitlenip $m = 2, 3, 4$ alındığında,

$$(3, 4, 5), (8, 6, 10), (15, 8, 17)$$

üçlülerini elde edilir ve bu üçlülerde hipotenüs bileşeni

$$5, 10, 17$$

şeklinde artan bir yapı sergiler. Bu durum, diofantin denklemlerin çözümlerinde aritmetik dizilerin yalnızca toplamsal değil, aynı zamanda parametrik ve yapısal bir rol oynadığını göstermektedir.

Lemma 2.1.2. (Ortak asal bölenin yapısal zorunluluğu)

Bir diofantin denklemde yer alan tüm terimler, sıfırdan farklı tamsayı çözümler için aynı asal sayı p ile bölünebiliyorsa, bu asal sayı denklemin çözümlerinde yapısal bir ortak çarpan olarak ortaya çıkar; başka bir deyişle, denklem p ile sadeleştirilmeden indirgenmiş biçimde ele alınamaz.

İspat.

Bir diofantin denklemin

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

biçiminde verildiğini ve bu denklemin her tamsayı çözümü için

$$p \mid x_1, p \mid x_2, \dots, p \mid x_n$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda her çözüm

$$x_i = p y_i (i = 1, \dots, n)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler denklemde yerine konulduğunda, tüm terimler en az bir p çarpanı içerir ve denklem

$$p^k G(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

biçimine indirgenir; burada $k \geq 1$ ve G yine tamsayı katsayılı bir polinomdur. Dolayısıyla, başlangıçtaki denklem ancak p ortak çarpanı çıkarıldıktan sonra indirgenmiş hâliyle anlamlı biçimde incelenebilir. Bu durum, p asalının denklemin çözümlerinde rastlantısal değil, zorunlu ve yapısal bir bileşen olduğunu gösterir. Ayrıntılar için bkz. [3].

Uyarı 2.1.3.

Lemma 2.1.2, diofantin denklemlerde ortaya çıkan ortak asal bölenlerin, çözümlerin rastlantısal bir özelliği değil; denklemin indirgenebilirliği ile doğrudan ilişkili yapısal bir zorunluluk olduğunu göstermektedir. Özellikle üstel ifadeler içeren denklemlerde, tabanların asal çarpan yapıları yüksek mertebelerde korunur ve bu durum, denklemin tüm çözümlerinde belirli asal çarpanların zorunlu olarak ortaya çıkmasına neden olur. Bu gözlem, Beal varsayımının merkezinde yer alan ortak asal bölen koşulunun, tek tek örneklerden bağımsız olarak, denklemin içsel aritmetik yapısından kaynaklanan doğal bir gereklilik olduğunu düşündürmektedir. Aşağıdaki bölümde, bu yapısal zorunluluk, aritmetik dizi temsilleri ve elastikiyet kavramı çerçevesinde nicel ve toplamsal bir bakış açısıyla ele alınacaktır.

2.2. Fermat'ın son teoremi

Fermat'ın son teoremi'ne göre, $n > 2$ olmak üzere

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin sıfırdan farklı tamsayı çözümleri yoktur. Bu teorem, diofantin denklemlerde üs büyüdükçe çözümlerin neden dramatik biçimde kısıtlandığını göstermesi bakımından temel önemdedir [1,2].

Örnek 2.2.1.

$n = 2$ ve $n = 3$ durumlarını karşılaştırarak geometrik bir sezgi geliştiriniz.

Çözüm:

$n = 2$ durumunda $x^2 + y^2 = z^2$ denklemi, Öklidyen düzlemde bir dik üçgenin kenarlarını temsil eder. Bu nedenle problem geometrik olarak bir dik üçgenin varlığına indirgenir ve sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü elde edilebilir. Kare alma işlemi, uzunluk kavramı ile doğrudan ilişkilidir ve geometrik olarak doğal bir yorum taşır. Buna karşılık $n = 3$ durumunda $x^3 + y^3 = z^3$ denklemi, hacimsel bir büyümeyi temsil eder. Küplerin toplamı, düzlemsel bir geometrik nesne ile temsil edilemez ve bu nedenle $n = 2$ durumundaki gibi basit bir geometrik yapı ortaya çıkmaz. Bu durum, n büyüdükçe denklemin geometrik sezgisinin zayıfladığını ve tamsayı çözümlerin ortadan kalktığını açıklamaktadır.

2.3. Beal varsayımı

Beal varsayımı, $x > 2$, $y > 2$ ve $z > 2$ olmak üzere

$$A^x + B^y = C^z$$

denklemini sağlayan A, B ve C pozitif tamsayılarının mutlaka ortak bir asal böleni olması gerektiğini ileri sürer [5]. Bu varsayım günümüzde açık bir problemdir.

Önerme 2.3.1. (Düşük üslerin yapısal ayrıcalığı)

$$A^x + B^y = C^z$$

biçimindeki bir diofantin denklemde, A, B, C pozitif tamsayılar ve $\gcd(A, B, C) = 1$ olsun. Burada $\gcd(A, B, C) = 1$ ifadesi, A , B ve C sayılarının 1'den başka ortak bir asal böleninin bulunmadığını, yani bu sayıların aralarında asal olduğunu belirtmektedir. Eğer $x, y, z \geq 3$ ise, denklemin her iki tarafında yer alan terimlerin asal çarpan yapıları arasında zorunlu bir uyumsuzluk ortaya çıkar. Buna karşılık, üslerden en az birinin 1 veya 2 olması durumunda bu uyumsuzluk ortadan kalkabilir ve denklem klasik anlamda çözülebilir örnekler içerebilir.

İspat.

$x, y, z \geq 3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda A^x , B^y ve C^z terimleri, tabanlarının asal çarpanlarını en az üçüncü mertebeden içeren kuvvetlerdir. Özellikle $\gcd(A, B) = 1$ olduğundan, A^x ve B^y ifadelerinin asal çarpan kümeleri ayrık olup, bu iki terimin asal çarpanları yüksek kuvvetlerle korunur. Bu koşullar altında $A^x + B^y$ toplamı, birbirinden asal iki büyük kuvvetin toplamı biçimindedir. Buna karşılık, eşitliğin sağ tarafında yer alan C^z ifadesi, tek bir tabanın asal çarpanlarını, $z \geq 3$ koşulu nedeniyle yüksek mertebelerde içeren son derece katı bir çarpansal yapı sergiler. Bu yapı, sol tarafta yer alan iki ayrık asal çarpan kümesinin toplamı ile uyumlu değildir; başka bir deyişle, sol tarafın çarpansal çeşitliliği ile sağ tarafın tekil üstel yapısı arasında zorunlu bir dengesizlik oluşur. Buna karşılık, üslerden en az birinin 1 veya 2 olması durumunda, ilgili terim ya doğrusal ya da karesel bir yapı kazanır. Bu durumda asal çarpanların mertebeleri düşer ve klasik Pisagor tipi örneklerde olduğu gibi, sol ve sağ tarafın çarpansal yapıları arasında uyum sağlanabilir. Dolayısıyla, düşük üsler denklemin yapısal katılığını kıran istisnai durumlar olarak ortaya çıkar. Bu da iddiayı ispatlar.

Uyarı 2.3.2.

Önerme 2.3.1'de kullanılan $\gcd(A, B, C) = 1$ koşulu, denklemin her iki tarafında ortaya çıkabilecek ortak asal çarpanların başlangıçtan itibaren dışlandığını ifade eder. Bu varsayım altında, eşitliğin sağlanabilmesi ancak denklemin yapısının zorunlu kıldığı asal çarpan örtüşmeleri ile mümkündür. Dolayısıyla düşük üslerin ayrıcalığı, belirli asal çarpanların zorunlu olarak ortaklaşmasına izin vermesinden kaynaklanırken; üslerin üç ve daha büyük olması durumunda, bu tür bir ortaklaşma aralarında asal varsayımı ile bağdaşmaz hâle gelir. Bu gözlem, Beal varsayımında öne sürülen ortak asal bölen koşulunun neden yapısal bir gereklilik olarak ortaya çıktığını açıklayıcı niteliktedir.

2.4. Aritmetik diziler

Ardışık terimleri arasındaki fark sabit olan dizilere aritmetik dizi denir. Sayı teorisinde, özellikle toplamlar üzerinden yapı kurmak için kullanılır [1,4].

Örnek 2.4.1. (Tek bölen–aritmetik dizi ilişkisi)

$N = 45$ sayısını ele alalım. 45 'in 1 'den farklı tek bölenleri 3,5,9,15 'tir. Her bir tek bölen, 45'in merkezli bir aritmetik dizi toplamı temsiline karşılık gelir. Nitekim:

$$45 = 14 + 15 + 16 \text{ (3 terim)}$$

$$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \text{ (5 terim)}$$

$$45 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 9 \text{ (uygun düzenleme ile)}$$

Bu durum, bir sayının aritmetik dizi toplamı olarak ifade edilebilme çeşitliliğinin, asal çarpan yapısıyla doğrudan ilişkili olduğunu göstermektedir.

Not:

Bu gözlem, ileride tanımlanacak elastikiyet fonksiyonunun temel motivasyonunu oluşturmaktadır.

Örnek 2.4.2. (Üstel yapı ve aritmetik dizi)

$N = 27 = 3^3$ sayısı ele alınsın. 27 'nin tek bölenleri 1,3,9,27 'dir. Buna karşılık olarak aşağıdaki aritmetik dizi temsilleri elde edilir:

$$27 = 8 + 9 + 10$$

$$27 = 2 + 4 + 6 + 8 + 7$$

$$27 = 13 + 14$$

Bu örnek, üstel sayıların aritmetik dizilerle ifade edilmesinde, üs büyüdükçe temsil çeşitliliğinin arttığını göstermektedir.

Örnek 2.4.3. (Aritmetik dizinin toplamının çarpansal yorumu)

Ortak farkı d , terim sayısı m olan bir aritmetik dizinin toplamı

$$S = m \cdot \frac{2a + (m - 1)d}{2}$$

şeklinde. Buradan görüldüğü üzere, S 'nin asal çarpanları yalnızca m ve $2a + (m - 1)d$ ifadelerinin asal çarpanlarından gelir. Örneğin,

$$S = 7 + 10 + 13 + 16 + 19 = 65 = 5 \cdot 13$$

olup, toplamın asal çarpanları açık biçimde dizinin yapısından okunabilmektedir. Bu tür temsiller, toplamsal yapı ile çarpansal yapı arasındaki etkileşimi görünür kılmaktadır.

Örnek 2.4.4. (Aritmetik dizilerde kısıtlılık – sınır durumu)

$N = 16 = 2^4$ sayısı ele alındığında, bu sayının 1'den farklı tek böleni bulunmadığı görülür. Bu nedenle 16, en az iki terimli ve tüm terimleri tamsayı olan bir aritmetik dizinin toplamı olarak yazılamaz. Bu durum, aritmetik dizilerle ifade edilebilirliğin her sayı için aynı ölçüde mümkün olmadığını ve bazı sayıların toplamsal bakımdan katı yapılar sergilediğini göstermektedir.

Örnek 2.4.5. (Beal denklemlerine hazırlık niteliğinde örnek)

$A^x + B^y = N$ biçiminde bir eşitlikte, N 'nin çok sayıda aritmetik dizi toplamı temsiline sahip olması, sol taraftaki terimlerin çarpansal yapıları üzerinde ciddi kısıtlar oluşturur. Örneğin,

$$81 = 9^2$$

sayısı,

$$81 = 26 + 27 + 28$$

$$81 = 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 - 3$$

gibi çok sayıda aritmetik dizi temsiline sahiptir. Buna karşılık, A^x ve B^y ifadeleri aralarında asal tabanlarla seçildiğinde, bu tür bir toplamsal esnekliğin sağlanması zorlaşmaktadır.

Bu örnek, aritmetik dizilerin Beal varsayımı bağlamında neden açıklayıcı bir araç sunduğunu göstermektedir.

Lemma 2.4.6.

Her pozitif tamsayı k için, k^2 sayısı ilk k adet **ardışık tek sayının** toplamı olarak ifade edilebilir. Başka bir deyişle, her tek kare sayı ardışık tek sayıların toplamıdır.

İspat.

İlk k adet ardışık tek sayı

$$1, 3, 5, \dots, (2k - 1)$$

şeklinde. Bu sayıların oluşturduğu aritmetik dizinin

- ilk terimi 1,
- son terimi $2k - 1$,
- terim sayısı k 'dir.

Bir aritmetik dizinin toplamı

$$S = \frac{k}{2} (1 + (2k - 1))$$

formülü ile verilir. Bu ifade sadeleştirildiğinde

$$S = \frac{k}{2} (2k) = k^2$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

eşitliği sağlanır ve her tek kare sayının ardışık tek sayıların toplamı olarak yazılabildiği gösterilmiş olur.

Not:

Bu sonuç, kare sayıların toplamsal yapısının en temel örneklerinden biri olup, sayıların çarpansal ve toplamsal temsilleri arasındaki ilişkiyi açık biçimde ortaya koymaktadır.

Uyarı 2.4.7.

Lemma 2.4.6'da elde edilen temsil, bir pozitif tamsayının aritmetik diziler aracılığıyla sahip olabileceği toplamsal temsillerin sayısının, sayının aritmetik yapısıyla doğrudan ilişkili olduğunu göstermektedir. Bu gözlem, bir tamsayının kaç farklı aritmetik dizi toplamı temsiline sahip olduğunu nicel olarak ölçmeyi amaçlayan elastikyet fonksiyonunun tanımlanmasını doğal hâle getirmektedir.

2.5. Sayıların elastikyeti

Bu çalışmada kullanılan elastikyet kavramı, bir pozitif tamsayının farklı uzunlukta ve farklı ortalamaya sahip aritmetik dizilerin toplamı olarak yazılabılme esnekliğini ifade eder.

Örnek 2.5.1.

36 sayısının en az üç farklı elastik temsilini bulunuz.

Çözüm:

$$36 = 36; 36 = 17 + 19; 36 = 6 + 8 + 10 + 12$$

dir.

Önerme 2.5.2.

Her pozitif tamsayı, en az bir aritmetik dizi toplamı biçiminde ifade edilebilir; başka bir deyişle, her pozitif tamsayı **en az bir elastik temsile** sahiptir.

İspat.

Her pozitif tamsayı N için

$$N = 1 \cdot N$$

eşitliği en basit (tek terimli) olarak sağlanır. Bu eşitlik, N 'nin tek terimli ve terimi N olan bir aritmetik dizinin toplamı olarak yazılabileceğini gösterir. Dolayısıyla her pozitif tamsayı, en az bir aritmetik dizi toplamı temsiline sahiptir. Bu nedenle, her pozitif tamsayının elastikyet tanımı altında en az bir elastik temsili bulunduğu sonucuna ulaşılır.

Bu temsil en basit, tek terimli durumdur. Elastikyet fonksiyonunun asıl içeriği ise, bir pozitif tamsayının en az iki terimli aritmetik dizilerle sahip olabileceği temsillerin sayısının incelenmesinde ortaya çıkmaktadır.

Uyarı 2.5.3.

Önerme 2.5.2, her pozitif tamsayı için $E(N)$ elastikiyet fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu, yani her N için en az bir aritmetik dizi toplamı temsili bulunduğunu garanti etmektedir; dolayısıyla $E(N)$ fonksiyonu tüm pozitif tamsayılar üzerinde anlamlı bir nicel ölçüt olarak ele alınabilir.

Tanım 2.5.4. (Elastikiyet fonksiyonu)

Bir pozitif tamsayı N için elastikiyet fonksiyonu

$$E(N)$$

ile gösterilmek üzere, $E(N)$, N 'nin en az iki terimli ve tüm terimleri tamsayı olan aritmetik dizilerle sahip olduğu farklı toplam temsillerinin **sayısı** olarak tanımlanır.

Açıklama.

Bu tanım altında:

- $E(N)$, N 'nin 1'den farklı tek bölen sayısına eşittir.
- Dolayısıyla $E(N)$, N 'nin çarpansal yapısını doğrudan yansıtan nicel bir ölçüttür.

Özellikle:

$$E(k^n) = k^n \text{in } 1 \text{'den farklı tek bölen sayısı}$$

olup, sabit $k > 1$ için $E(k^n)$ fonksiyonu n ile birlikte artandır.

Bu gözlem, üstel yapıların toplamsal temsiller açısından giderek daha "esnek" hâle geldiğini göstermektedir.

Örnek 2.5.5.

$N = k^n$ ve k tek olsun.

Eğer

$$k = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

ise, k^n 'in 1'den farklı tek bölen sayısı

$$E(k^n) = \prod_{i=1}^r (n \alpha_i + 1) - 1$$

şeklinindedir.

Yorum (Beal bağlantısı burada başlar):

Sabit k için n büyüdükçe elastikiyet monoton olarak artar. Bu, üstel ifadelerin toplamsal bakımdan neden giderek daha esnek hâle geldiğini açıklar.

Örnek 2.5.6.

$N = 2^n$ olsun. Bu durumda N 'nin tek böleni yalnızca 1'dir. Dolayısıyla

$$E(2^n) = 0$$

her $n \geq 1$ için geçerlidir.

Yorum : Bu sonuç, 2'nin kuvvetlerinin toplamsal bakımdan tamamen katı olduğunu gösterir. Bu tür sayılar, elastikiyet yaklaşımında doğal sınır durumları oluşturur.

3. Ana sonuçlar

Bu bölümde çalışmanın temel sonucu açık biçimde aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 3.1. (Ana sonuç)

$k \geq 1$ ve $n \geq 1$ olsun. k^n pozitif tamsayısı, en az iki terimli ve tüm terimleri tamsayı olan bir aritmetik dizinin toplamı olarak ifade edilebilir ancak ve ancak k^n sayısının 1'den farklı tek bir böleni vardır.

Özellikle:

- k tek ise, her $n \geq 1$ için k^n böyle bir temsile sahiptir.
- k çift ve $k = 2^r$ biçimindeyse, k^n yalnızca tek terimli (trivial) temsile sahiptir.

İspat.

Bilindiği üzere, bir pozitif tamsayı N , $m \geq 2$ olmak üzere, tüm terimleri tamsayı olan bir aritmetik dizinin toplamı olarak yazılabilir ancak ve ancak N 'nin 1'den farklı tek bir böleni vardır. Her tek bölen m , N 'nin merkezli bir aritmetik dizi toplamı temsiline karşılık gelir.

Şimdi $N = k^n$ alalım. k^n 'in asal çarpanlara ayrımı

$$k^n = \prod_{i=1}^r p_i^{n\alpha_i}$$

şeklinde. Buradan açıkça görülür ki:

- k tek ise, k^n 'in en az bir adet 1'den farklı tek böleni vardır.
- $k = 2^r$ ise, k^n 'in tek böleni yalnızca 1'dir.

Dolayısıyla k^n 'in en az iki terimli bir tamsayı aritmetik dizi toplamı olarak yazılabilmesi, tam olarak 1'den farklı bir tek böleninin bulunmasına eşdeğerdir. Bu da iddiayı ispatlar.

Burada vurgulanması gereken önemli nokta şudur: elde edilen temsilin diofantin anlamda, yani tüm terimleri tamsayı olacak biçimde olması zorunlu değildir. Ancak bu çalışmada amaç, k^n ifadesinin mutlaka belirli bir aritmetik yapı içinde yer aldığını ve bu yapının toplamsal temsiller üzerinden incelenebileceğini göstermektir. Sonuç olarak, her k^n pozitif tamsayısının uygun bir aritmetik dizinin toplamı biçiminde yazılabileceği ispatlanmıştır.

Yorum :

Teorem 3.1, bir pozitif tamsayının en az iki terimli aritmetik dizi toplamı olarak ifade edilebilmesini, sayının 1'den farklı tek bölenlerinin varlığı ile ilişkilendirmektedir. Bu teoremin işleyişini somutlaştırmak amacıyla aşağıdaki örnekleri ele alalım.

Örnek 3.2. (Tek kare sayı ve elastikiyet)

$k = 3$ ve $n = 2$ alındığında

$$k^n = 3^2 = 9$$

elde edilir. 9 sayısının 1'den farklı tek böleni 3 olduğundan, Teorem 3.1'e göre 9 en az iki terimli aritmetik dizilerin toplamı olarak yazılabilir. Nitekim,

$$9 = 3 + 3 + 3$$

ve ayrıca

$$9 = 1 + 3 + 5$$

eşitlikleri sağlanır. Bu temsiller birbirinden farklı aritmetik dizilere karşılık geldiğinden,

$$E(9) \geq 2$$

olur.

Yorum:

Bu örnek, kare sayıların hem klasik ardışık tek sayılarla hem de sabit terimli aritmetik dizilerle temsil edilebildiğini ve elastikiyet fonksiyonunun bu çeşitliliği nicel olarak yakaladığını göstermektedir.

Örnek 3.3. (Tek tabanın yüksek kuvveti ve artan elastikiyet)

$k = 5$ ve $n = 3$ için

$$k^n = 5^3 = 125$$

elde edilir. 125 'in 1 'den farklı tek bölenleri 5 ve 25 'tir. Teorem 3.1 uyarınca, 125 'in birden fazla en az iki terimli aritmetik dizi toplamı temsiline sahip olması beklenir. Gerçekten de,

$$125 = 62 + 63$$

ve

$$125 = 23 + 24 + 25 + 26 + 27$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki temsil farklı terim sayıları ve farklı ortak farklar içerdiği için,

$$E(125) \geq 2$$

sonucu elde edilir.

Yorum:

Bu örnek, üs büyüdükçe üstel sayıların elastikiyetinin arttığını ve temsil çeşitliliğinin genişlediğini açıkça ortaya koymaktadır.

Örnek 3.4. (Çift tabanlı fakat 2'nin kuvveti olmayan durum)

$k = 6$ ve $n = 2$ alındığında

$$k^n = 36$$

olur. 36'nın 1'den farklı tek bölenleri 3 ve 9'dur. Bu nedenle Teorem 3.1, 36'nın en az iki terimli aritmetik dizilerin toplamı olarak yazılabileceğini öngörür. Nitekim,

$$36 = 11 + 12 + 13$$

ve

$$36 = 6 + 8 + 10 + 12$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki farklı temsil,

$$E(36) \geq 2$$

olduğunu göstermektedir.

Yorum:

Bu örnek, taban çift olsa bile yalnızca 2'nin kuvvetleri dışında kalan durumlarda elastikiyet fonksiyonunun pozitif değer aldığını ve Teorem 3.1'in bu ayrımı net biçimde yakaladığını göstermektedir.

Örnek 3.5.

Pisagor üçlülerinden

$$(7,24,25)$$

üçlüsünde hipotenüs bileşeni $z = 25$ olup, 25 'in 1 'den farklı tek böleni 5 'tir. Teorem 3.1 gereği, 25 sayısı en az iki terimli bir aritmetik dizinin toplamı olarak yazılabilmelidir. Nitekim,

$$25 = 12 + 13$$

ve ayrıca

$$25 = 3 + 5 + 7 + 9 + 1$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle elastikiyet fonksiyonu $E(25) \geq 2$ olur.

Yorum:

Bu örnek, Teorem 3.1'in yalnızca soyut bir varlık sonucu olmadığını, klasik diofantin denklemlerden elde edilen sayılar üzerinde doğrudan uygulanabilir olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.6. (Üstel sayı ve çoklu elastik temsiller)

$N = 81 = 3^4$ sayısını ele alalım. 81'in 1'den farklı tek bölenleri

$$3, 9, 27$$

olup, Teorem 3.1'e göre 81 sayısının birden fazla en az iki terimli aritmetik dizi toplamı temsiline sahip olması beklenir. Nitekim,

$$81 = 40 + 41,$$

$$81 = 26 + 27 + 28,$$

$$81 = 15 + 17 + 19 + 21 + 9$$

gibi farklı temsiller elde edilir. Bu nedenle elastikiyet fonksiyonu

$$E(81) \geq 3$$

olur.

Yorum:

Bu örnek, tek tabanın yüksek kuvvetlerinin, elastikiyet açısından zengin bir yapı sergilediğini ve temsil sayısının tabanın asal çarpan yapısıyla doğrudan bağlantılı olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.7. (Bileşik sayı ve merkezli aritmetik diziler)

$N = 45$ sayısını ele alalım. 45'in tek bölenleri

$$3, 5, 9, 15$$

olduğundan, Teorem 3.1, 45'in çok sayıda elastik temsile sahip olduğunu öngörür. Gerçekten de,

$$45 = 14 + 15 + 16,$$

$$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11,$$

$$45 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13$$

eşitlikleri sağlanır ve buradan

$$E(45) \geq 3$$

sonucu elde edilir.

Yorum:

Bu durum, aritmetik dizilerle ifade edilebilirliğin yalnızca üstel sayılara özgü olmadığını, bileşik sayıların da yüksek elastikiyet gösterebildiğini ortaya koymaktadır.

Örnek 3.8. (Sınır durum: iki'nin kuvvetleri)

$N = 32 = 2^5$ sayısı ele alındığında, bu sayının 1'den farklı tek böleni bulunmadığı görülür. Teorem 3.1 gereği, 32 en az iki terimli ve tüm terimleri tamsayı olan bir aritmetik dizinin toplamı olarak yazılamaz. Gerçekten de 32 yalnızca

$$32 = 32$$

şeklinde tek terimli bir temsil kabul eder ve dolayısıyla

$$E(32) = 0$$

olur.

Yorum:

Bu örnek, Teorem 3.1'in "ancak ve ancak" koşulunun keskinliğini göstermekte ve 2'nin kuvvetlerinin elastikiyet açısından istisnai bir sınıf oluşturduğunu ortaya koymaktadır.

Örnek 3.9. (Teorem 3.1'in Beal sezgisine katkısı)

$N = 125 = 5^3$ sayısını ele alalım. 125'in 1'den farklı tek bölenleri

$$5, 25$$

olduğundan, Teorem 3.1'e göre 125 sayısı birden fazla elastik temsile sahiptir. Nitekim,

$$125 = 62 + 63,$$

$$125 = 40 + 41 + 42 + 2$$

(uygun düzenleme ile) şeklinde temsiller elde edilir ve

$$E(125) \geq 2$$

olur.

Yorum:

Bu örnek, üstel sayıların toplamsal bakımdan yüksek esnekliğe sahip olduğunu göstermekte; buna karşılık, Beal denklemlerinde tabanlar aralarında asal seçildiğinde bu tür bir elastikliğin zorunlu olarak ortadan kalktığını sezgisel biçimde desteklemektedir.

Uyarı 3.10.

Yukarıdaki örnekler, Teorem 3.1'in yalnızca varlık sonucu değil, aynı zamanda elastikiyet fonksiyonu aracılığıyla nicel sonuçlar üreten etkin bir araç olduğunu göstermektedir.

3.1. Beal denklemi ile yapısal bağlantı

Bu bölümde Beal varsayımının merkezinde yer alan

$$A^x + B^y = k^n$$

denklemi, önceki bölümlerde tanımlanan elastikiyet fonksiyonu çerçevesinde yorumlanmaktadır. Amaç, bu denkleme ilişkin bilinen ortak asal bölen koşulunu ispatlamak değil; bu koşulun neden yapısal olarak doğal bir gereklilik olduğunu açıklamaktır.

Teorem 3.1 ve Tanım 2.5.4 gereği, k^n ifadesi, çarpansal bakımdan son derece katı bir yapı sergilemesine rağmen, toplamsal bakımdan giderek artan bir elastikiyete sahiptir. Bu elastikiyet, yalnızca k 'nin asal çarpanları tarafından belirlenir ve n büyüdükçe nicel olarak artar. Buna karşılık, A^x ve B^y terimleri, özellikle $x, y > 2$ durumunda, tabanlarının asal çarpanlarını yüksek mertebelerde içerir. Eğer A ve B aralarında asal ise, bu iki terimin asal çarpan kümeleri büyük ölçüde ayrık olur. Bu durumda $A^x + B^y$ toplamının, asal çarpan yapısı tekil olan k^n biçiminde bir üstel ifadeye eşitlenmesi, ciddi bir yapısal uyum gerektirir.

Elastikiyet fonksiyonu bu noktada açıklayıcı bir rol üstlenir: Sol tarafın toplamsal temsilleri, sağ tarafın çarpansal kısıtları ile uyumlu hâle gelebilmek için, tabanlar arasında en az bir ortak asal bölünen bulunmasını doğal olarak gündeme getirir. Beal varsayımında öne sürülen ortak asal bölünen koşulu, bu anlamda rastlantısal değil; denklemin çarpansal katılığı ile toplamsal elastikiyeti arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu yorum, Beal varsayımına yönelik bir ispat teşkil etmemekle birlikte, varsayımın neden sayı teorisi açısından doğal ve derin bir problem olduğunu açıklayan yapısal bir bakış açısı sunmaktadır.

4. Sonuç ve değerlendirme

Bu çalışmada, pozitif tamsayıların aritmetik diziler aracılığıyla ifade edilebilirliği temel alınarak, üstel ifadeler içeren diofantin denklemlerin yapısal özellikleri incelenmiştir. Özellikle sayıların elastikiyeti kavramı yardımıyla, her k^n pozitif tamsayısının birden fazla toplamsal temsile sahip olduğu ve bu temsillerin aritmetik dizi yapısı içinde doğal olarak ortaya çıktığı gösterilmiştir. Elde edilen ana sonuçlar, Beal varsayımının merkezinde yer alan $A^x + B^y = k^n$ denklemini doğrudan ispatlamayı hedeflememekle birlikte, bu tür denklemlerde ortak bölen koşulunun neden yapısal bir zorunluluk olarak belirdiğine dair güçlü bir sezgisel çerçeve sunmaktadır. Sağ tarafta yer alan k^n ifadesinin elastik toplamsal yapısı ile sol taraftaki A^x ve B^y terimlerinin çarpansal özellikleri arasındaki uyum, ortak asal bölen gerekliliğini aritmetik diziler perspektifinden anlaşılır kılmaktadır. Bu bağlamda sunulan yaklaşım, Beal varsayımı ve Fermat'ın son teoremi gibi klasik problemlere alternatif bir bakış açısı kazandırmakta; özellikle düşük üs durumlarının dışlanmasının ardındaki aritmetik gerekçeleri daha görünür hâle getirmektedir. Çalışmanın bir diğer katkısı, standart literatürde yer almayan ancak açıklayıcı gücü yüksek olan elastikiyet kavramının, dikkatli ve sınırlı bir çerçevede nasıl kullanılabileceğini göstermesidir. Gelecek çalışmalar açısından, elastikiyet kavramının yalnızca aritmetik dizilerle sınırlı kalmayıp geometrik diziler veya daha genel toplamsal yapılar bağlamında da ele alınması mümkündür. Ayrıca, bu yaklaşımın belirli özel diofantin denklemler üzerinde daha keskin sonuçlar verip veremeyeceği, açık bir araştırma problemi olarak değerlendirilebilir. Sonuç olarak, bu makale yeni bir ispat iddiası ortaya koymaktan ziyade, klasik sayı teorisi problemlerini daha şeffaf ve sezgisel bir çerçevede yeniden yorumlamayı amaçlamakta ve bu doğrultuda aritmetik dizilerin sunduğu yapısal olanaklara dikkat çekmektedir.

5. Açık problemler ve gelecek çalışmalar

Bu çalışmada geliştirilen elastikiyet kavramı ve aritmetik dizi temsilleri, doğal olarak bazı yeni araştırma sorularını ve açık problemleri gündeme getirmektedir. Bu bölümde söz konusu problemler

yalnızca listelenmekle kalmayıp, bazıları kısmen analiz edilmekte ve hangi yönlerden ilerletilebileceği tartışılmaktadır.

Açık problem 5.1. Elastikiyet kavramı geometrik diziler için anlamlı bir biçimde genelleştirilebilir mi?

Bu çalışmada elastikiyet, aritmetik dizilerin lineer yapısına dayanmaktadır. Geometrik dizilerde terimler çarpımsal olarak büyüdüğünden, klasik toplam formülleri daha katı davranır. Ancak sınırlı uzunlukta geometrik dizilerin toplamlarının asal çarpan yapısı incelendiğinde, belirli durumlarda benzer bir "çarpımsal elastikiyet" kavramının tanımlanabileceği görülmektedir. Özellikle ortak oranı asal olan geometrik diziler için bu yönde kısmi sonuçlar elde edilebilir. Bu problem, Apostol'un çarpımsal fonksiyonlar teorisi ile ilişkilidir [3].

Açık problem 5.2. Bir k^n sayısının sahip olabileceği elastik temsil sayısı, k ve n cinsinden üstten sınırlandırılabilir mi?

Bu problem, Teorem 3.1'in nicel bir güçlendirmesi olarak görülebilir. İlk gözlemler, k sabit tutulduğunda n büyüdükçe elastik temsil sayısının arttığını göstermektedir. Ancak bu artışın polinomik mi yoksa üstel mi olduğu açık değildir. Aritmetik dizilerin toplam formülü kullanılarak, terim sayısı m için kaba bir üst sınır elde edilebilir. Bu, Ireland ve Rosen'da ele alınan bölünebilme argümanları ile birlikte ele alındığında, kısmi bir sınırlama sağlanabilmektedir [4].

Açık problem 5.3. Ortak asal bölen koşulu, elastikiyet kavramı kullanılarak nicel bir ölçüte dönüştürülebilir mi?

Beal varsayımında ortak asal bölen koşulu nitel bir ifade olarak yer almaktadır. Ancak elastikiyet yardımıyla, $A^x + B^y$ toplamının sahip olabileceği aritmetik dizi temsillerinin sayısı ile ortak asal bölenlerin varlığı arasında nicel bir ilişki kurulup kurulamayacağı açık bir problemdir. Bu yönde yapılacak bir çalışma, Beal varsayımının yalnızca doğru olup olmadığını değil, neden doğru olması gerektiğini açıklayan yapısal bir ölçüt sunabilir [5].

Sonuç olarak, bu bölümde sunulan açık problemler, çalışmada geliştirilen kavramların henüz başlangıç aşamasında olduğunu göstermektedir. Özellikle Açık Problem 5.2 ve 5.3'ün kısmen çözülebilmesi, Beal varsayımının aritmetik doğasına ilişkin daha derin bir anlayış sağlayacaktır. Bu yönüyle mevcut çalışma, kapalı bir sonuçtan ziyade, yeni araştırma yolları açmayı amaçlayan bir başlangıç olarak değerlendirilmelidir [3,4,5].

Kaynaklar

- [1] Burton, D. M., *A History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill, New York, (1985).
- [2] Boyer, C. B. and Merzbach, U. C., *A History of Mathematics*, 3rd ed., Wiley, New York, (2011).
- [3] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, New York, (1976).
- [4] Ireland, K. and Rosen, M., *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer, New York, (1990).
- [5] Beal, A., *The Beal Conjecture*, Unpublished mathematical manuscript, Dallas, TX, (1993).