Euroasia Journal of Mathematics, Engineering, Natural & Medical Sciences
International Indexed and Refereed
ISSN 2667-6702

IBRAGIMOV-GADJIEV TİPLİ BİR OPERATÖRÜN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

ON THE APPROXIMATION WITH AN IBRAGIMOV-GADJIEV TYPE OPERATOR

Gürel BOZMA*, **Esat BARS**

Zonguldak Bulent Ecevit University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, 67100, Zonguldak, TURKEY.

** Corresponding author: gurrel@gmail.com*

Geliş Tarihi / Received: 31.01.2022
Kabul Tarihi / Accepted: 10.03.2022
Araştırma Makalesi/Research Article
DOI: 10.38065/euroasiaorg.932

ÖZET

Bu çalışma, matematiğin uygulamalı alanlarından biri olan operatör teorisi alanında önemli görsel ve nümerik bilgiler içeren Ibragimov-Gadjiev tipi bir operatörün yaklaşım özelliklerinin incelendiği bir çalışmadır. Yaklaşım kuramı; çalışması zor ve karmaşık fonksiyonlara özellikleri bilinen daha basit ve çalışılabilir fonksiyonlarla yaklaşmayı temel alır. Bu anlamda birçok operatör tanımlanmış ve matematiğin değişik alanlarında ve günlük hayatın problemlerini çözmede kendine yer bulmuştur. Örneğin Bernstein operatörleri kan basıncına ilişkin bir simülasyon oluşturmak için kullanılmıştır. Türev özelliklerinin kullanılması gereken klasik Ibragimov-Gadjiev operatörünün aksine sürekli fonksiyonların ve toplam formülünün özellikleri kullanılarak operatöre ilişkin önemli özellikler elde edilmiştir. Tanımlanan operatör, günlük hayata ilişkin uygulamalı çalışmalar yapan araştırmacıların, kullanabileceği bir araç niteliğindedir.

Literatürde C[0,A] üzerinde tanımlanan fonksiyonlara yaklaşım için kullanılan bu operatör sınırı değişkene bağlı hale getirilerek test fonksiyonları için uygun özellikleri sağlayacak şekilde genelleştirilmiştir. Daha sonra uzaydaki her fonksiyonun düzgün yakınsaklığını elde edebilmek için gerekli olan özellikler sağlatılarak operatör için bir çekirdek fonksiyon belirlenmiştir. Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Grafik ve tablolarla elde edilen sonuçlar uygulamalı olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ibragimov-Gadjiev Operatörleri, Süreklilik Modülü, Yaklaşım Hızı.

ABSTRACT

This work is a study examining the approximation properties of an Ibragimov-Gadjiev type operator, which contains important visual and numerical information in the field of operator theory, which is one of the applied areas of mathematics. Approximation theory; it is based on approaching difficult and complex functions with simpler and workable functions whose properties are known. In this sense, many operators have been defined and found a place in different fields of mathematics and in solving the problems of daily life. For example, Bernstein operators are used to create a simulation of blood pressure. Contrary to the classical Ibragimov-Gadjiev operator, where derivative properties should be used, important properties of the operator are obtained by using the properties of the continuous functions and the sum formula. The described operator is a tool that researchers can use for applied studies on daily life.

This operator, which is used to approximate the functions defined on C[0,A] in the literature; It has been generalized to provide suitable properties for test functions by making the bounded depends on the variable. Then, a kernel function for the operator is determined by providing the necessary properties to obtain the smooth convergence of each function in the space.Then, the speed of approach was calculated with the help of the modulus of continuity.The results obtained with graphics and tables are given in practice.

Keywords: Ibragimov-Gadjiev Operators, Modulus of Continuity, Rate of Convergence.

1. GİRİŞ

1885 yılında, yaklaşım kuramının temeli sayılan araştırmalardan biri olan Weierstrass' ın yaptığı çalışmada, sonlu bir aralıkta tanımlı sürekli her fonksiyona, o aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığı kanıtlanmıştır.(Weierstrass 1885). Daha sonra Bohman [0,1] aralığında, toplam formülü aracılığıyla tanımlı doğrusal pozitif operatörlerin yaklaşım durumunu araştırmıştır. Korovkin operatörün basit üç fonksiyon için koşulları sağlaması durumunda uzaydaki tüm fonksiyonlar için de yakınsamanın sağlanacağını göstermiştir (Korovkin 1953).

Bu önemli kanıttan sonra bu teoremin uygulaması olabilecek operatör arayışları başlamış ve birçok araştırmacı birbirinden farklı ya da birkaç operatörün birleştirilmesi ile yeni yeni operatörler geliştirerek teoriyi hızla ileri taşımışlardır. Bu operatörlere birkaç örnek şu şekilde verilebilir: (Bernstein 1915). de yaklaşım kuramının temel operatörünü; .Weierstrass' ın teoremini sağlayan bir operatör olarak tanımlamıştır. (Bărbosu 2000) de Bernstein operatörlerinin iki değişkenli bir genellemesini tanımlamıştır. Bernstein operatörünün başka operatörle birleştirilmesiyle inşaa edilen operatörlere örnek olarak (Büyükyazıcı and Ibikli 2006).da yapılan Bernstein-Chlodowsky operatörlerinin çalışıldığı makale ile (Bilgin and Eren 2021) nin iki değişkenli Bernstein Stancu operatörlerinin bir modifikasyonunu inceledikleri makale verilebilir.

Günlük hayattaki ihtiyaç doğrultusunda gelişen alanlardan olan yaklaşım kuramı gün geçtikçe kullanımı artan matematik alanlarındandır. Mühendislik alanında kullanılan dinamik sistemlere ilişkin problemlerin çözümünde, yapıların depreme karşı dayanıklılıklarının ölçülmesi ve havacılık sektörü başta olmak üzere birçok endüstriyel alandaki modellemeler için yaklaşım kuramından yararlanılmıştır.

q-analiz alanındaki çalışmaların etkisiyle literatürdeki birçok operatörün q versiyonu çalışılmaya başlanmıştır. (Agratini 2010) da Stancu operatörlerinin q genellemesi ve yaklaşım özellikleri verilmiştir. (Bilgin and Çetinkaya 2018) da üç boyutlu q-Bernstein-Chlodowsky polinomlarının yaklaşım özellikleri grafiklerde kullanılarak incelenmiştir. (Herdem and Buyukyazici 2020) de ise ağırlıklı uzaylarda q-Ibragimov-Gadjiev operatörünün temel özellikleri çalışılmıştır.

Literatürdeki önemli operatörlerden biri olan Ibragimov-Gadjiev operatörü de araştırmacıların ilgisini çekmeye devam eden operatörlerin başında gelir. İlk olarak (Ibragimov and Gadjiev 1970) de tanımlanan operatöre ilişkin, özellikle Gadjiev in ülkemizde yetiştirdiği doktora öğrencileri başta olmak üzere birçok önemli çalışma yapılmıştır: (Ispir et al, 2008), (Gonul and Coskun, 2012), (Ghorbanalizadeh 2012), (Gonul Bilgin and Ozgur, 2019) vb. Şimdi günümüze kadar yapılmış çalışmalardan bazılarına kısaca değinelim. (Doğru, 1997) da operatörün klasik halinin genellemesi yapılarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. (Coşkun 2011) de operatörün ağırlıklı uzaylardaki yaklaşım durumuyla ilgili bir probleme çözüm aranmıştır. (Gonul and Coskun, 2013) da operatörün $[0, A]$ aralığın da bir modifikasyonu tanımlanmış, (Acar 2017) ve (Deniz and Aral 2015). de ise operatörün Durmeyer genelleştirmeleri çalışılmıştır. Ayrıca, (Gonul Bilgin and Coskun 2018) da literatürde ki bazı modifikasyonların karşılaştırması yapılmıştır.

Çalışmanın konu dizaynı şu şekilde verilebilir. İlk olarak değişken sınırlı bir aralık üzerinde kurduğumuz yaklaşım özelliklerini inceleyeceğimiz operatör tanımlandı. Operatörün basit fonksiyonlar için sağladığı eşitlikler kanıtlandı. Korovkin tipi teoremi sağladığı gösterildikten sonra operatöre ilişkin yaklaşım hızı hesabı ve operatörün ağırlıklı uzaydaki hali incelendi. Çalışmaya ilişkin uygulama kısmı ve sonuçlar bölümü ile çalışma tamamlandı.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 2.1

σ_n ve ϕ_n : $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\phi_n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\phi_n+n+2} n = 1$ koşullarını sağlayan gerçel sayı dizileri olsun.

$P_{n,\theta}(x)$ ise θ ve n parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyon olsun.

1-) Her $n = 1,2,3,\dots$ her $\theta = 0,1,2,\dots$ ve her sonlu $x \in \left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ olmak üzere

$(-1)^{\theta}P_{n,\theta}(x) \geq 0$' dır.

2-) Her $x \in \left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için

$\sum_{\theta=0}^{\infty} P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!} = 1$

eşitliği geçerlidir.

3-) Her $x \in \left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için

$P_{n,\theta}(x) = -nxP_{n+z,\theta-1}(x)$

eşitliği sağlanacak ve $n+z$ bir doğal sayı olacak biçimde bir z sayısı vardır.

Bu bilgiler yardımıyla

$$\tilde{G}_n(f,x) = \sum_{\theta=0}^{\infty} f\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!} \tag{2.1}$$

operatörü tanımlanır.

Lemma 2.1

(2.1) ile verilen operatör için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $\tilde{G}_n(1,x) = 1$,

ii) $\tilde{G}_n(t,x) = \dfrac{n\sigma_n x}{\phi_n+n+2} + \dfrac{n+1}{\phi_n+n+2}$,

iii) $\tilde{G}_n(t^2,x) = \dfrac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}x^2 + \dfrac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}x + \dfrac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2} + \dfrac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}$

Kanıt:

$\tilde{G}_n(1,x) = 1$ olduğu tanımdan açıktır.

$$\text{ii) } \tilde{G}_n(t,x) = \sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!}$$

$$= \sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!} + \sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!}$$

$$= \sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{(\theta-1)!} + \sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!}$$

$$= \sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{-nx}{\phi_n+n+2}\right)P_{n+z,\theta-1}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{(\theta-1)!} + \frac{n+1}{\phi_n+n+2}$$

$$= \left(\frac{n\sigma_n x}{\phi_n+n+2}\right)\sum_{\theta=0}^{\infty} P_{n+z,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{(\theta-1)!} + \frac{n+1}{\phi_n+n+2} \qquad [(\theta \to \theta+1)\ (\mathrm{n}+z) \in \mathbb{N}]$$

$$=\frac{n\sigma_n x}{\phi_n+n+2}+\frac{n+1}{\phi_n+n+2}$$

bulunur. Son olarak; t^2 ye operatör uygulanırsa

$$iii)\ \tilde{G}_n(t^2,x)=\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)^2 P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$=\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{\theta^2+2\theta(n+1)+(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$=\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{\theta^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}+\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{2\theta(n+1)}{(\phi_n+n+2)^2}\right)\ P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$+\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$=\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{\theta(\theta-1)}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}+\frac{1}{\phi_n+n+2}G_n(t,x)$$

$$+\sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{2(n+1)}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{(\theta-1)!}+\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$=\sum_{\theta=2}^{\infty}\left(\frac{{\sigma_n}^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta-2}}{(\theta-2)!}+\frac{1}{\phi_n+n+2}G_n(t,x)$$

$$+\sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{2(n+1)(-nx)}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{(\theta-1)!}+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

$$=\sum_{\theta=2}^{\infty}\left(\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)x^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n+2z,\theta-2}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta-2}}{(\theta-2)!}+\frac{1}{\phi_n+n+2}G_n(t,x)$$

$$+\sum_{\theta=1}^{\infty}\left(\frac{2(n+1)\sigma_n nx}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n+z,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta-1}}{(\theta-1)!}+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $(\theta\to\theta+1),(\theta\to\theta+2)$ dönüşümleri ve n+ z , n + $2z$ $\in\mathbb{N}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\tilde{G}_n(t^2,x)=\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)x^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}+\frac{1}{\phi_n+n+2}G_n(t,x)$$

$$+\sum_{\theta=0}^{\infty}\left(\frac{2(n+1)\sigma_n nx}{(\phi_n+n+2)^2}\right)\ P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

$$=\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)x^2}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{n\sigma_n x}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{2(n+1)\sigma_n nx}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

$$=\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}x^2+\frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}x+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 2.1

$$\tilde{G}_n(f,x)=\sum_{\theta=0}^{\infty} f\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!}$$

operatörü ve her $f\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt:

Operatörün tanımı ve Korovkin teoremi dikkate alınarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t^m,x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0,\quad \mathrm{m}=0,1,2$$

şeklindeki üç koşulun gösterilmesi yeterlidir.

$$\left|\tilde{G}_n(1,x)-1\right|=\left|\sum_{\theta=0}^{\infty}P_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^{\theta}}{\theta!}-1\right|=0$$

eşitliği geçerli olduğundan kolayca

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(1,x)-1\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left|\tilde{G}_n(t,x)-x\right|=\left|x\left(\frac{n\sigma_n}{\phi_n+n+2}-1\right)\right|+\left|\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right|$$

eşitliği ve $x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{\phi_n+n+2}n=1$ olduğu kullanılarak

$$\max_{x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}\left|\tilde{G}_n(t,x)-x\right|\le\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\left|\frac{n\sigma_n}{\phi_n+n+2}-1\right|+\left|\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right|$$

bulunur. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t,x)-x\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\sigma_n}{\phi_n+n+2}-1\right|+\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right|=0 \text{ olacağından}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t,x)-x\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0 \text{ gösterilmiş olur.}$$

Son olarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t^2,x)-x^2\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0$$

olduğu kanıtlanırsa ispat biter.

$$\left|\tilde{G}_n(t^2,x)-x^2\right|=\left|x^2\left(\frac{\sigma_n{}^2n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}-1\right)+\frac{n\sigma_n(2n+3)x}{(\phi_n+n+2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}+\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right|$$

olduğundan

$$\max_{x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}\left|\tilde{G}_n(t^2,x)-x^2\right|\le\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\left|\frac{\sigma_n{}^2n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}-1\right|+\left|\frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}\right|\left|\frac{n+1}{n+2}\right|$$

$$+\left|\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{{\sigma_n}^2 n^2}{(\phi_n+n+2)^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{{\sigma_n}^2 nz}{(\phi_n+n+2)^2}=1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}=0$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t^2,x)-x^2\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}\leq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\left(\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}-1\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)+$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\left(\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}-1\right)=0$$

eşitliği kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(t^2,x)-x^2\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. O halde Korovkin teoremi gereği her $f\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}=0$$

bulunur.

Örnek 2.1

$P_{n,\theta}(x)=(-1)^\theta(nx)^\theta e^{-nx\sigma_n}$ 1 ve 3 özelliklerini sağlar.

Gerçekten

1-) Her n=*1,2,3,…*, θ=*0,1,2,…* ve $x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için

$e^{-nx}\geq 0$ olduğundan $(-1)^\theta K_{n,\theta}(x)=(nx)^\theta e^{-nx\sigma_n}\geq 0$ olur.

2-) Her x $\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ için operatör tanımından

$$\sum_{\theta=0}^{\infty}K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}=\sum_{\theta=0}^{\infty}(-1)^\theta(nx)^\theta e^{-nx\sigma_n}\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}=1$$

3-) $K_{n,\theta}(x)=-nxK_{n+m,\theta-1}(x)$ ve n+ z bir doğal sayı olacak şekilde bir z sayısı bulunmalıdır.

$$(-1)^\theta(nx)^\theta e^{-nx\sigma_n}=-nx(-1)^{\theta-1}((n+z)x)^{\theta-1}e^{-(n+z)x\sigma_{n+z}}$$

eşitliğinden $z=0$ eşitliği sağlayan bir köktür.

Teorem 2.2

$f\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]$ ve yeterince büyük n ve (σ_n), (ϕ_n)'den bağımsız bir C sabiti için

$$\left\|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}\leq C\omega\{f;\delta_n\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt:

Operatör için

$$\left|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right| \leq \sum_{\theta=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)-f(x)\right| K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!} \tag{2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Süreklilik modülünün temel özelliklerinde $t=\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}$ olarak seçilirse her $\delta_n>0$ için

$$\left|f\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)-f(x)\right| \leq \omega(f,\delta_n)\left(1+\frac{\left|\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}-x\right|}{\delta_n}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Oeratörün doğrusallığı ve pozitifliği kullanılarak son eşitsizlik (2.2)de yerine yazılırsa

$$\left|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right| \leq \sum_{\theta=0}^{\infty}\omega(f,\delta_n)\left(1+\frac{\left|\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}-x\right|}{\delta_n}\right)K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

$$=\omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\sum_{\theta=0}^{\infty}\left|\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}-x\right|K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}+1\right\}$$

eşitliği elde edilir.

Cauchy Schwarz eşitşizliğinden kolayca

$$\left|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right| \leq \ \omega(f,\delta_n)\left\{\frac{1}{\delta_n}\left[\sum_{\theta=0}^{\infty}\left|\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}-x\right|^2 K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}\right]^{1/2}+1\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan

$$\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}-x\right)^2=\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)^2-2x\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right)+x^2$$

eşitliği geçerli olduğundan

$$\left|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right| \leq \ \omega(f,\delta_n)\ \left\{\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{{\sigma_n}^2 n(n+m)}{(\phi_n+n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2+\frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}-2\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n\sigma_n}{\phi_n+n+2}\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+1}{\phi_n+n+2}\right)+\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right)^{1/2}+1\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada yeterince büyük n ler için

$$\delta_n=\sqrt{\left(\frac{n\sigma_n}{\phi_n+n+2}-1\right)^2+\frac{\sigma_n}{\phi_n+n+2}+\frac{1}{n+2}\frac{1}{\phi_n+n+2}}$$

seçimiyle

$$\left\|\tilde{G}_n(f,x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]} \leq C\omega\{f;\delta_n\}$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

3. BULGULAR

Bu bölümde operatörün ağırlıklı uzaydaki durumu incelenecektir.

Ibragimov- Gadjiev- operatörünün$C_\rho^k[0,\infty[$ uzayındaki genelleştirmesi $x \in [0,\infty[$ ve $f \in C_\rho^k[0,\infty[$ alınarak

$$\tilde{G}_n(f,x) = \sum_{\theta=0}^{\infty} f\left(\frac{\theta+n+1}{\phi_n+n+2}\right) K_{n,\theta}(x)\frac{(-\sigma_n)^\theta}{\theta!}$$

biçiminde olur.

Uyarı 3.1 $C_\rho^k[0,\infty[$ uzayında Gadjiev-İbragimov operatörünün genelleştirmesi için Lemma 2.1 deki eşitlikler geçerlidir:

Lemma 3.1:

$x \in\ [0,\infty[$ olsun. $\tilde{G}_n; C_\rho[0,\infty['$ dan $B_\rho[0,\infty['$ya bir dönüşüm tanımlar.

Kanıt:

$\left\|\tilde{G}_n(f,x)\right\|_\rho \leq M_\rho$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $\rho(x)$=1+x^2 olarak alınırsa

$$\tilde{G}_n(\rho,x) = \tilde{G}_n(1+t^2,x) = +\frac{{\sigma_n}^2 n(n+z)}{(\phi_n+n+2)^2}x^2 + \frac{n\sigma_n(2n+3)}{(\phi_n+n+2)^2}x + \frac{(n+1)^2}{(\phi_n+n+2)^2}$$

$$+\frac{n+1}{(\phi_n+n+2)^2}$$

bulunur.

$C_\rho[0,\infty[$ uzayının norm tanımı ve (σ_n), (ϕ_n) dizilerinin özellikleri dikkate alınarak $M_\rho := 8$ seçimiyle istenen gösterilmiş olur.

Teorem3.1: $\rho(x)$=1+x^2 ve $\tilde{G}_n\colon C_\rho \to B_\rho$ doğrusal pozitif operatör dizisi yukarıda tanımlandığı şekilde olmak üzere r=0,1,2 için

$$\lim_{n\to\infty} \underset{x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}{sup} \left|\tilde{G}_n(t^r,x) - x^r\right| = 0$$

koşulları sağlanmakta olup bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

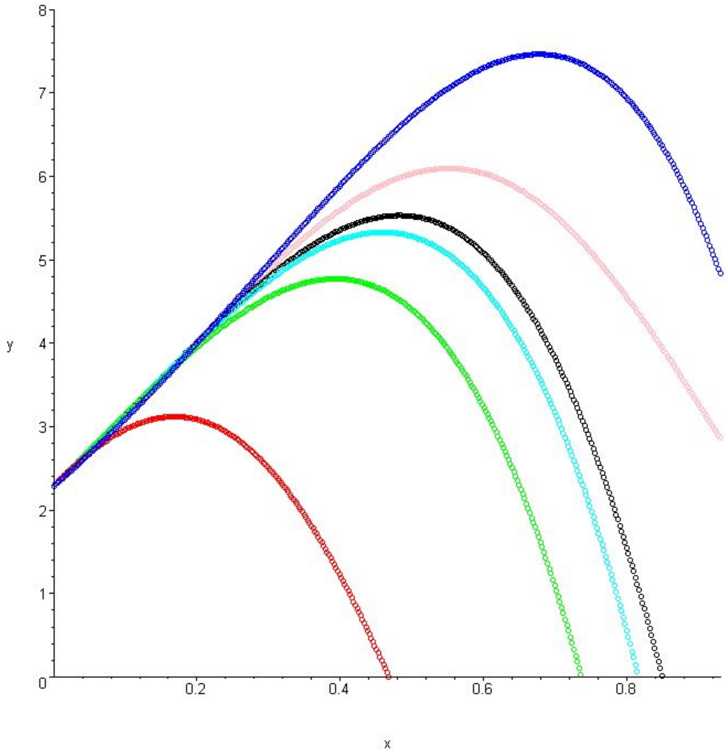
$$\lim_{n\to\infty} \underset{x\in\left[0,\frac{n+1}{n+2}\right]}{sup} \left|\tilde{G}_n(f,x) - f(x)\right| = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt; Operatörün tanımı, Lemma 2.1 ve supremum özellikleri kullanılarak kolayca elde edilir.

Örnek 3.1

Aşağıda $f(x) = \sin(2x+1).e^{(2x+1)}$ (mavi) fonksiyonuna $\tilde{G}_n(f,x)$ operatörü ile yaklaşıma ilişkin grafik verilmiştir. Burada $(\sigma_n) = 1$, $(\phi_n) = n$ alınarak kırmızıyla $\tilde{G}_2(f,x)$, yeşille $\tilde{G}_5(f,x)$, turkuazla $\tilde{G}_7(f,x)$, siyahla $\tilde{G}_8(f,x)$,pembeyle $\tilde{G}_{12}(f,x)$ için çizim yapılmıştır.



Şekil 3.1 $\tilde{G}_n(f,x)$ operatörüyle $f(x) = \sin(2x+1) \,.\, e^{(2x+1)}$ e yaklaşım

Örnek 3.2

Aşağıda $f(x) = \frac{(2x+1)}{7}$ fonksiyonuna $\tilde{G}_n(f,x)$ operatörü ile yaklaşımın hızına ilişkin tablo verilmiştir.

Table 4.1. The error bound of function $f(x) = \frac{(2x+1)}{7}$ for $(c_n) = 1$ and $(d_n) = n$

$\boldsymbol{n}$	**Error estimate of $f(x) = \frac{(2x+1)}{7}$ with $\tilde{G}_n(f,x)$**
	0.8412370450
$\mathbf{10^2}$	*0.7283949810*
$\mathbf{10^3}$	*0.7157125020*
$\mathbf{10^4}$	*0.7144285535*
$\mathbf{10^5}$	*0.7142999995*
$\mathbf{10^6}$	*0.7142871430*
$\mathbf{10^7}$	*0.7142858570*
$\mathbf{10^8}$	*0.7142857285*
$\mathbf{10^9}$	*0.7142857155*

SONUÇLAR

Tanımlanan bu modifiye operatörde türev özelliklerine ihtiyaç duyulmadığından yaklaşım özellikleri kolayca elde edilmiş olup grafikler ve nümerik hesapla bulgular desteklenmiştir. Günlük hayattaki problemleri çözümü için yararlı ve kullanışlı bir operatör olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Acar, T. (2017). Rate of convergence for Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators. *Demonstratio Mathematica*, *50*(1), 119-129.

Agratini, O. (2010). On a q-analogue of Stancu operators. *Open Mathematics*, *8*(1), 191-198.

Bărbosu, D. (2000). Some generalized bivariate Bernstein operators. *Miskolc Mathematical Notes*,*1*(1), 3-10.

Bernstein, S. N. (1915). Sur la représentation des polynômes positifs. *Сообщенія Харьковскаго математическаго общества*,*14*(5), 227-228.

Bilgin, N. G., & Çetinkaya, M. (2018). Approximation By Three-Dimensional q-Bernstein-Chlodowsky Polynomials. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *22*(6), 1774-1786.

Bilgin, N. G., & Eren. M., (2021). A Generalization of Two Dimensional Bernstein-Stancu Operators. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *6*(2), 130-142.

Büyükyazıcı, I., & Ibikli, E. (2006). Inverse theorems for Bernstein-Chlodowsky type polynomials. *Journal of Mathematics of Kyoto University*,*46*(1), 21-29.

Coşkun, T. (2011). On a Construction of Positive Linear Operators for Approximation of Continuous Functions in the Weighted Spaces. *Journal of Computational Analysis & Applications*, *13*(4).

Doğru, O. (1997). On a certain family of linear positive operators. Turkish Journal of Mathematics, 21(4), 387-399.

Denız, E., & Aral, A. (2015). Convergence properties of Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators. Creat. Math. Inform. 24 No. 1, 17

Ghorbanalizadeh, A. (2012). On the order of weighted approximation of unbounded functions.43rd Annual Iranian Mathematics Conference, 27-30 August 2012 University of Tabriz.

Gonul, N., & Coskun, E. (2012). Weighted approximation by positive linear operators. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 36, 41-50.

Gonul, N., & Coskun, E. (2013). Approximation with modified Gadjiev-Ibragimov operators in C [0, A]. Journal of Computational Analysis & Applications, 15(1).

Gonul Bilgin, N. , & Coşkun, N. (2018). Comparison Result of Some Gadjiev Ibragimov Type Operators. Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi,8(1), 188-196.

Gonul Bilgin, N. ,& Ozgur, N. (2019). Approximation by Two Dimensional Gadjiev-Ibragimov Type Operators. Ikonion Journal of Mathematics, 1(1), 1-10.

Herdem, S., & Buyukyazıcı, I. (2020). Weighted approximation by q-Ibragimov-Gadjiev operators. *Mathematical Communications*, *25*(2), 201-212.

Ibragimov, I. I., & Gadjiev, A. D. (1970). On a certain Family of linear positive operators. Soviet Math. Dokl., English Trans, 11, 1092-1095.