Euroasia Journal of Mathematics, Engineering, Natural & Medical Sciences
International Indexed and Refereed
ISSN 2667-6702

SINIF CEBİRİ YAKLAŞIMI ALTINDA D_{2d} ve C_{3i} NOKTA GRUPLARI

POINT GROUPS D_{2d} and C_{3i} UNDER CLASS SUM APPROACH

Melike DEDE

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Van / Türkiye

Harun AKKUS

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Van / Türkiye

Geliş Tarihi / Received: 05.07.2021
Kabul Tarihi / Accepted: 20.09.2021
Araştırma Makalesi/Research Article
DOI: 10.38065/euroasiaorg.639

ÖZET

Bu çalışmada, sonlu nokta grupları olan ve sırasıyla tetragonal ve trigonal kristal sistemlere ait olan D_{2d} ve C_{3i} nokta grupları sınıf toplamı yaklaşımı altında ele alınmıştır. Bu nokta gruplarını değişmez bırakan simetri elemanları ile simetri grupları oluşturulmuş ve ilgili gruplara ait Cayley tabloları elde edilmiştir. Bu tablolar kullanılarak elemanların eşlenikleri ile grubun sınıfları oluşturulmuştur. Sınıfı oluşturan elemanların toplamıyla elde edilen her bir sınıf toplamı için seküler denklemler yazılmıştır. Bu seküler denklemler çözülerek karakter vektörleri elde edilmiştir. Böylece sınıf toplamı yaklaşımı altında ele alınan her iki nokta grubu için hesaplanan karakterler ile karakter tabloları yeniden oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Cayley Tablosu, Nokta Grubu, Sınıf Cebiri, Simetri Elemanları

ABSTRACT

In this study, the point groups D_{2d} and C_{3i} which belong to tetragonal and trigonal crystal systems, respectively, are handled under the class sum approach. Symmetry groups were formed with symmetry elements that left these point groups unchanged and Cayley tables of related groups were obtained. Using these tables, the conjugates of the elements and the classes of the group were formed. Secular equations are written for each class sum obtained by the sum of the elements that make up the class. By solving these secular equations, the character vectors are obtained. Thus, the character tables were reconstructed with the calculated characters for both point groups under the class sum approach.

Keywords: Cayley Table, Point Group, Class Algebra, Symmetry Elements

1. GİRİŞ

Simetri kuramı olarak da bilinen grup kuramı, soyut cebirdeki grup kavramını inceleyen matematiğin bir çalışma alanıdır. Doğa bilimlerinden görsel sanatlara kadar birçok alanda etkili olan bu kurama dair çalışmalar yaklaşık olarak 18. yüzyılda başlamış ve günümüzde de devam etmektedir. Grup kuramına Euler, Cayley, Gauss, Lagrange ve Ruffini gibi birçok matematikçi çalışmalarıyla katkıda bulunmuştur. Ancak bu kurama asıl yön veren, öne sürdüğü teoremle simetri alanında devrim yaratan genç matematikçi Evariste Galois'dır (Stewart, 2007). Literatüre Galois teoremi olarak geçen bu teoreme göre beşinci dereceden denklemleri çözmenin imkânsız oluşu denklemin simetrisinden kaynaklanmaktadır. Bu simetriler Galois testini geçerlerse o zaman denklem cebirsel bir formülle çözülebilir. Ancak simetriler Galois testini geçemezlerse bu durumda çözüm yoktur.

Simetri, bütünü oluşturan parçaların düzenli tekrarıdır. Bir cisme bir dönüşüm uygulandıktan sonra cisim aynı görünüyorsa yapılan bu dönüşüm simetri dönüşümüdür (Feynman, Leighton, Sands, 2016). Diğer bir deyişle simetri sisteme yapılan değişikliklere kayıtsız kalma olayıdır. Simetri işlemi belli simetri elemanları kullanılarak gerçekleşir ve bir noktaya, bir düzleme ya da bir eksene göre yapılır. Yedi kristal sistemden (kristal singoni) elde edilen 14 Bravais örgüsüne öteleme hariç diğer simetri işlemleri uygulandığında 32 tane nokta grubu elde edilir. Elde edilen bu 32 nokta gruplarının hangi kristal sistemlere ait olduğu ve gösterimleri daha önceki çalışmalarda mevcuttur (Bradley, Cracknell, 1972). Nokta grupların belirlenmesi incelenen molekül veya kristalin sınıflandırılması için önemlidir. Çünkü aynı simetri elemanlarına sahip kristallerin nokta grupları aynıdır. Bu durumda aynı simetri elemanlarına sahip kristal veya moleküllerin incelenmesinde daha önce belirlenen nokta grubu büyük kolaylık sağlar.

Bir kümenin grup olabilmesi için belirli koşulları sağlaması gerekir. Grup aksiyomları olarak bilinen bu koşullar; kapalılık aksiyomu, birim eleman aksiyomu, ters eleman aksiyomu ve birleşme aksiyomudur. Bu aksiyomlar altında grubun öncelikle simetri elemanları oluşturulur. Bu simetri elemanları sistemi değişmez bırakan simetri operasyonlardır.

Ele alınan herhangi bir nokta grubunun elemanların eşleniği ile gruba ait sınıflar oluşturulur. $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bir grup ise G'nin sınıfları,

$$g_i * g_j * g_i^{-1} = g_k \tag{1}$$

bağıntısıyla elde edilen eşlenik elemanlardan oluşur. Burada, $i = 1, 2, \ldots, n$, j= $1, 2, \ldots, n$ ve n, G'nin derecesi veya eleman sayısıdır. g_k ise g_j'nin eşlenikleridir ve G'nin sınıflarını oluşturur. Burada $k = 1, 2, \ldots, m$ ve m oluşturulan sınıftaki elemanların sayısıdır. Sınıfı oluşturan elemanların derecesi aynı olmak zorundadır ancak derecesi aynı olan tüm elemanlar aynı sınıfta bulunmak zorunda değildir (Dresselhaus, 2002).

2. SINIF TOPLAMLARI ve SINIF TOPLAMLARININ ÇARPIMI

Nokta grubuna ait karakter tablolarının elde edilmesinde kullanılan teori genellikle temsil teorisidir. Ancak grubun sınıf ve sınıf toplamları yardımıyla da bu tablolar elde edilebilmektedir. Bu yöntemle daha önce O ve D_4 (Killingback, 1973) ve C_{3v} (Duffey, 1992) nokta grupları çalışılmış ve bu nokta gruplarına ait karakter tabloları karakter vektörlerin elde edilmesiyle oluşturulmuştur.

Her grupta elde edilen ilk sınıf toplamı daima birim elemanla elde edilen sınıf toplamıdır.

$$\ell_1 = E \tag{2}$$

j. sınıf için sınıf toplamı; $A, B, C, \ldots$ grubun elemanları olmak üzere,

$$\ell_j = A + B + C + \cdots \tag{3}$$

şeklindedir. j. sınıf toplamının tersi ise $\ell_{\bar{j}}$ olarak gösterilir:

$$\ell_{\bar{j}} = A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} + \cdots \tag{4}$$

Herhangi iki sınıf toplamının çarpımı, sınıf elemanlarının bireysel çarpımlarının toplamı olarak ele alınır. İki sınıf toplamının çarpımı,

$$\ell_j \ell_{\bar{k}} = \sum_l c_{j\bar{k}l}\, \ell_{\bar{l}} = c_{j\bar{k}1}\ell_{\bar{1}} + c_{j\bar{k}2}\ell_{\bar{2}} + \cdots . \tag{5}$$

(Duffey, G.H., 1992). Burada $c_{j\bar{k}l}$ katsayısı, ℓ_j sınıf toplamı ile $\ell_{\bar{k}}$ sınıf toplamının çarpım tablosu boyunca $\ell_{\bar{l}}$'nin dağılımını verir. Ele alınan herhangi bir sınıf toplamı için özdeğer-özvektör denklemi,

$$\ell_j \mathcal{E} = \lambda_j \mathcal{E} \tag{6}$$

olarak yazılabilir. Eş (6)'daki λ_j j. sınıf toplamı için elde edilen özdeğer ve $\mathcal{E}$, λ_j özdeğerine karşılık gelen özvektördür. $\mathcal{E}$ özvektörü, sınıf toplamlarının tersi yardımıyla,

$$\mathcal{E} = \sum_k y_k \ell_{\bar{k}} \tag{7}$$

olarak yazılabilir. Burada y_k'lar özvektörün bileşenlerdir. Eş (7), Eş (6)'da yazılıp sınıf toplamlarının çarpım ifadesi kullanılırsa, Eş (8) elde edilir:

$$\sum_k (c_{j\bar{k}l} - \lambda_j \delta_{kl}) y_k = 0 \tag{8}$$

Katsayılar determinantı sıfıra eşit olmadıkça tüm y_k değerleri sıfıra eşit olur. Bundan dolayı katsayılar determinantı sıfıra eşit olması gerekir (Duffey, G.H., 1992):

$$\begin{vmatrix} c_{j\bar{1}1} - \lambda_j & c_{j\bar{2}1} & . & \cdots & c_{j\bar{n}1} \\ c_{j\bar{1}2} & c_{j\bar{2}2} - \lambda_j & . & & c_{j\bar{n}2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{j\bar{1}n} & c_{j\bar{2}n} & \ldots & & c_{j\bar{n}n} - \lambda_j \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Seküler denklem olarak bilinen Eş (9) çözüldüğünde λ_j özdeğerleri elde edilir. Buradan elde edilen λ_j değerleri Eş. (8)'de yerine yazılarak y_k değerleri hesaplanır. ℓ_i sınıf toplamı için $l.$ özdeğer $\lambda_i{}^r$ ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör $y_i{}^{(r)}$ ise,

$$\sum_{m=1}^{n} h_i y_{\bar{\imath}}{}^{(r)} y_i{}^{(r)} = g \tag{10}$$

olmalıdır. Burada h_i, i. sınıfın derecesi ve g ise grubun derecesidir.

3. D_{2d} VE C_{3i} NOKTA GRUPLARI

Sırasıyla tetragonal ve trigonal kristal sistemlere ait olan D_{2d} ile C_{3i} nokta grupları,

$D_{2d} = \{E, C_2, S_4, S_4{}^3, C_2{}', C_2{}'', \sigma_d, \sigma_d{}'\}$ $\qquad$ $C_{3i} = \{E, C_3, C_3{}^2, I, S_6{}^5, S_6\}$

şeklindedir. Bu nokta gruplarına ait Cayley tabloları Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1. D_{2d} nokta grubu için Cayley tablosu

D_{2d}	E	C_2	S_4	$S_4{}^3$	$C_2{}'$	$C_2{}''$	σ_d	$\sigma_d{}'$
E	E	C_2	S_4	$S_4{}^3$	$C_2{}'$	$C_2{}''$	σ_d	$\sigma_d{}'$
C_2	C_2	E	$S_4{}^3$	S_4	$C_2{}''$	$C_2{}'$	$\sigma_d{}'$	σ_d
S_4	S_4	$S_4{}^3$	C_2	E	$\sigma_d{}'$	σ_d	$C_2{}'$	$C_2{}''$
$S_4{}^3$	$S_4{}^3$	S_4	E	C_2	σ_d	$\sigma_d{}'$	$C_2{}''$	$C_2{}'$
$C_2{}'$	$C_2{}'$	$C_2{}''$	σ_d	$\sigma_d{}'$	E	C_2	S_4	$S_4{}^3$
$C_2{}''$	$C_2{}''$	$C_2{}'$	$\sigma_d{}'$	σ_d	C_2	E	$S_4{}^3$	S_4
σ_d	σ_d	$\sigma_d{}'$	$C_2{}''$	$C_2{}'$	$S_4{}^3$	S_4	E	C_2
$\sigma_d{}'$	$\sigma_d{}'$	σ_d	$C_2{}'$	$C_2{}''$	S_4	$S_4{}^3$	C_2	E

Tablo 2. C_{3i} nokta grubu için Cayley tablosu

C_{3i}	E	C_3	${C_3}^2$	I	${S_6}^5$	S_6
E	E	C_3	${C_3}^2$	I	${S_6}^5$	S_6
C_3	C_3	${C_3}^2$	E	${S_6}^5$	S_6	I
${C_3}^2$	${C_3}^2$	E	C_3	S_6	I	${S_6}^5$
I	I	${S_6}^5$	S_6	E	C_3	${C_3}^2$
${S_6}^5$	${S_6}^5$	S_6	I	C_3	${C_3}^2$	E
S_6	S_6	I	${S_6}^5$	${C_3}^2$	E	C_3

Elde edilen bu tablolar kullanılarak nokta gruplarına ait tüm sınıf toplamları oluşturulmuştur. D_{2d} nokta grubu için 5 sınıf toplamı elde edilmiştir. Bu sınıfları oluşturan elemanların tersi kendisine eşit olduğu için grubun sınıf toplamları ile sınıf toplamlarının tersi birbirlerine eşittir. D_{2d} nokta grubunun sınıf toplamları:

$\ell_1 = \ell_{\bar{1}} = E$

$\ell_2 = \ell_{\bar{2}} = \mathrm{C}_2$

$\ell_3 = \ell_{\bar{3}} = S_4 + {S_4}^3$

$\ell_4 = \ell_{\bar{4}} = {C_2}' + {C_2}''$

$\ell_5 = \ell_{\bar{5}} = \sigma_d + {\sigma_d}'$.

C_{3i} nokta grubu için 6 sınıf toplamı elde edilmiştir. Bu grup için sınıf toplamları ile sınıf toplamlarının tersi birbirlerinden farklıdır. C_{3i} grubunun sınıf toplamları ve sınıf toplamlarının tersi aşağıdaki gibidir:

Sınıf toplamları	Sınıf toplamları tersi
$\ell_1 = E$	$\ell_{\bar{1}} = E$
$\ell_2 = C_3$	$\ell_{\bar{2}} = {C_3}^2$
$\ell_3 = {C_3}^2$	$\ell_{\bar{3}} = C_3$
$\ell_4 = I$	$\ell_{\bar{4}} = I$
$\ell_5 = {S_6}^5$	$\ell_{\bar{5}} = S_6$
$\ell_6 = S_6$	$\ell_{\bar{6}} = {S_6}^5$

Bu grupların sınıf toplamlarının çarpım taploları Tablo 3 ve Tablo 6 da verilmiştir. Oluşturulan bu tablolardan Eş. (5)'te verilen $c_{j\bar{k}l}$ katsayıları oluşturulmuş ve buradan $c_{lj\bar{k}}$ katsayıları hesaplanmıştır.

Tablo 3. D_{2d} nokta grubunun sınıf toplamlarının çarpım tablosu

$\boldsymbol{D_{2d}}$	$\boldsymbol{\ell_{\bar{1}}}$	$\boldsymbol{\ell_{\bar{2}}}$	$\boldsymbol{\ell_{\bar{3}}}$	$\boldsymbol{\ell_{\bar{4}}}$	$\boldsymbol{\ell_{\bar{5}}}$
$\boldsymbol{\ell_1}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$
$\boldsymbol{\ell_2}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$
$\boldsymbol{\ell_3}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$2\ell_{\bar{1}} + 2\ell_{\bar{2}}$	$2\ell_{\bar{5}}$	$2\ell_{\bar{4}}$
$\boldsymbol{\ell_4}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$2\ell_{\bar{5}}$	$2\ell_{\bar{1}} + 2\ell_{\bar{2}}$	$2\ell_{\bar{3}}$
$\boldsymbol{\ell_5}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$2\ell_{\bar{4}}$	$2\ell_{\bar{3}}$	$2\ell_{\bar{1}} + 2\ell_{\bar{2}}$

$c_{lj\bar{k}}$ *katsayıları:*

$$c_{1j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{2j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{3j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{4j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_{5j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Seküler Denklem

$c_{1j\bar{k}}$ katsayısının transpozu alınarak oluşturulan 1. seküler denklemden elde edilen tek özdeğer, $\lambda_{1_{1,2,3,4,5,62}} = 1$ dir.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = 0$$

Bu özdeğere karşılık elde edilen koşullar,

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

şeklindedir. Ancak bu sonuç altı katlı $\lambda_1 = 1$ kökü $(1-\lambda_1)$ çarpımını sıfır yaptığından Eş. (8)'de verilen y_i'ler üzerinde herhangi bir şart koymaz.

2. Seküler Denklem

$c_{2j\bar{k}}$ katsayısının transpozu alınarak oluşturulan 2. seküler denklemden elde edilen özdeğerler $\lambda_{2_{1,2,3,4}} = 1$ $\lambda_{2_5} = -1$ şeklindedir.

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_{2_{1,2,3,4}} = 1$ özdeğere karşılık elde edilen koşullar,

$$y_1 = y_2 \qquad y_3 = 0 \qquad y_4 = 0 \qquad y_5 = 0$$

olur. Bu koşullar ve diklik şartları altında bu özdeğere karşılık herhangi bir karakter vektörü elde edilmemiştir.

$\lambda_{2_5} = -1$ özdeğeri ile elde edilen koşullar ise,

$$y_1 = -y_2 \qquad y_3 = 0 \qquad y_4 = 0 \qquad y_5 = 0$$

olarak elde edilmiştir. Bu koşullar ve diklik şartları göz önüne alındığında bu özdeğere karşılık bir tane karakter vektörü elde edilmiştir.

$$\mathcal{X}^{(5)} = (2, -2, 0, 0, 0)$$

D_{2d} nokta grubuna ait diğer seküler denklemler çözülerek hesaplanan karakter vektörlerinin tamamı Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. D_{2d} nokta grubu için elde edilen tüm özdeğer ve özvektörler

	Özdeğerler	y_k için elde edilen koşullar	Karakter vektörleri
1. Seküler denklem	$\lambda_1 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$	-
2. Seküler denklem	$\lambda_2 = 1$	$y_1 = y_2 \quad y_3 = y_4 = y_5 = 0$	-
	$\lambda_2 = 1$	$y_1 = -y_2 \quad y_3 = y_4 = y_5 = 0$	$\mathcal{X}^{(5)} = (2, -2, 0, 0, 0)$
3. Seküler denklem	$\lambda_3 = 0$	$y_1 = -y_2, \quad y_3 = y_4 = y_5 = 0$	$\mathcal{X}^{(5)} = (2, -2, 0, 0, 0)$
	$\lambda_3 = 2$	$y_1 = y_2 = y_3, \; y_4 = y_5$	$\mathcal{X}^{(1)} = (1,1,1,1,1)$ $\mathcal{X}^{(2)} = (1,1,1,-1,-1)$
	$\lambda_3 = -2$	$y_1 = y_2 = -y_3, \quad y_4 = -y_5$	$\mathcal{X}^{(3)} = (1,1,-1,1,-1)$ $\mathcal{X}^{(4)} = (1,1,-1,-1,1)$
4. Seküler denklem	$\lambda_4 = 0$	$y_1 = -y_2, \quad y_3 = y_4 = y_5 = 0$	$\mathcal{X}^{(5)} = (2, -2, 0, 0, 0)$
	$\lambda_4 = 2$	$y_1 = y_2 = y_4, \quad y_3 = y_5$	$\mathcal{X}^{(3)} = (1,1,-1,1,-1)$ $\mathcal{X}^{(1)} = (1,1,1,1,1)$
	$\lambda_4 = -2$	$y_1 = y_2 = -y_4, \quad y_3 = -y_5$	$\mathcal{X}^{(4)} = (1,1,-1,-1,1)$ $\mathcal{X}^{(2)} = (1,1,1,-1,-1)$
5. Seküler denklem	$\lambda_5 = 0$	$y_1 = -y_2, \; y_3 = y_4 = y_5 = 0$	$\mathcal{X}^{(5)} = (2, -2, 0, 0, 0)$
	$\lambda_5 = 2$	$y_1 = y_2 = y_5 \quad y_3 = y_4$	$\mathcal{X}^{(4)} = (1,1,-1,-1,1)$ $\mathcal{X}^{(1)} = (1,1,1,1,1)$
	$\lambda_5 = -2$	$y_1 = y_2 = -y_5 \quad y_3 = -y_4$	$\mathcal{X}^{(2)} = (1,1,1,-1,-1)$ $\mathcal{X}^{(3)} = (1,1,-1,1,-1)$

D_{2d} nokta grubu için karakter tablosu elde edilen karakter vektörleri kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

Tablo 5. D_{2d} nokta grubuna ait karakter tablosu

D_{2d}	E	C_2	$2S_4$	$2C_2{}'$	$2\sigma_d$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

D_{2d} nokta grubunun için yapılan işlem aşamalarının aynısı C_{3i} nokta grubu için de yapılmıştır. Ancak bu nokta grubu için hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla özdeğerler için,

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad \omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad \omega^* = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^* = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

tanımlamaları kullanılmıştır.

Tablo 6. C_{3i} nokta grubunun sınıf toplamlarının çarpım tablosu

C_{3i}	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{6}}$
ℓ_1	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{6}}$
ℓ_2	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$
ℓ_3	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{4}}$
ℓ_4	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$
ℓ_5	$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{1}}$	$\ell_{\bar{2}}$
$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{5}}$	$\ell_{\bar{6}}$	$\ell_{\bar{4}}$	$\ell_{\bar{2}}$	$\ell_{\bar{3}}$	$\ell_{\bar{1}}$

$c_{lj\bar{k}}$ *katsayıları:*

$$c_{1j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_{2j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_{3j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{4j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_{5j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c_{6j\bar{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tablo 7. C_{3i} nokta grubu için elde edilen tüm özdeğer ve özvektörler

	Ozdeğerler	y_k için elde edilen koşullar	Karakter vektörleri
1. Seküler denklem	$\lambda_1 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$	-
2. Seküler denklem	$\lambda_2 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 \quad y_4 = y_5 = y_6$	$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1)$ $\chi^{(4)} = (1,1,1,-1,-1,-1)$
	$\lambda_2 = \omega$	$\omega\, y_1 = y_3 \quad \omega\, y_2 = y_1 \quad \omega\, y_3 = y_2$ $\omega\, y_4 = y_6 \quad \omega\, y_5 = y_4 \quad \omega\, y_6 = y_5$	$\chi^{(2)} = (1,\omega,\omega^2,1,\omega,\omega^2)$ $\chi^{(5)} = (1,\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2)$
	$\lambda_2 = \omega^2$	$\omega^2\, y_1 = y_3 \quad \omega^2\, y_2 = y_1 \quad \omega^2\, y_3 = y_2$ $\omega^2\, y_4 = y_6 \quad \omega^2\, y_5 = y_4 \quad \omega^2\, y_6 = y_5$	$\chi^{(3)} = (1,\omega^2,\omega\,,1,\omega^2,\omega\,)$ $\chi^{(6)} = (1,\omega^2,\omega\,,-1,-\omega^2,-\omega\,)$
3. Seküler denklem	$\lambda_3 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 \quad y_4 = y_5 = y_6$	$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1)$ $\chi^{(4)} = (1,1,1,-1,-1,-1)$
	$\lambda_3 = \omega$	$\omega\, y_1 = y_2 \quad \omega\, y_2 = y_3 \quad \omega\, y_3 = y_1$ $\omega\, y_4 = y_5 \quad \omega\, y_5 = y_6 \quad \omega\, y_6 = y_4$	$\chi^{(3)} = (1,\omega^2,\omega\,,1,\omega^2,\omega\,)$ $\chi^{(6)} = (1,\omega^2,\omega\,,-1,-\omega^2,-\omega\,)$
	$\lambda_3 = \omega^2$	$\omega^2\, y_1 = y_2 \quad \omega^2\, y_2 = y_3 \quad \omega^2\, y_3 = y_1$ $\omega^2\, y_4 = y_5 \quad \omega^2\, y_5 = y_6 \quad \omega^2\, y_6 = y_4$	$\chi^{(2)} = (1,\omega,\omega^2,1,\omega,\omega^2)$ $\chi^{(5)} = (1,\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2)$
4. Seküler denklem	$\lambda_4 = 1$	$y_1 = y_4 \quad y_2 = y_5 \quad y_3 = y_6$	$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1\,)$
	$\lambda_4 = -1$	$y_1 = -y_4 \quad y_2 = -y_5 \quad y_3 = -y_6$	$\chi^{(4)} = (1,1,1,-1,-1,-1\,)$
5. Seküler denklem	$\lambda_5 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6$	$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1\,)$
	$\lambda_5 = -1$	$y_1 = y_2 = y_3 = -y_4 = -y_5 = -y_6$	$\chi^{(4)} = (1,1,1,-1,-1,-1\,)$
	$\lambda_5 = \omega$	$\omega\, y_1 = y_6 \quad \omega\, y_2 = y_4 \quad \omega\, y_3 = y_5$ $\omega\, y_4 = y_3 \quad \omega\, y_5 = y_1 \quad \omega\, y_6 = y_2$	$\chi^{(2)} = (1,\omega,\omega^2,1,\omega,\omega^2)$
	$\lambda_5 = \omega^2$	$\omega^2\, y_1 = y_6 \quad \omega^2\, y_2 = y_4 \quad \omega^2\, y_3 = y_5$ $\omega^2\, y_4 = y_3 \quad \omega^2\, y_5 = y_1 \quad \omega^2\, y_6 = y_2$	$\chi^{(3)} = (1,\omega^2,\omega,,1,\omega^2\omega)$
	$\lambda_5 = -\omega$	$\omega\, y_1 = -y_6 \quad \omega\, y_2 = -y_4 \quad \omega\, y_3 = -y_5$ $\omega\, y_4 = -y_3 \quad \omega\, y_5 = -y_1 \quad \omega\, y_6 = -y_2$	$\chi^{(5)} = (1,\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2)$
	$\lambda_5 = -\omega^2$	$\omega^2\, y_1 = -y_6 \quad \omega^2\, y_2 = -y_4 \quad \omega^2\, y_3 = -y_5$ $\omega^2\, y_4 = -y_3\; \omega^2\, y_5 = -y_1 \quad \omega^2\, y_6 = -y_2$	$\chi^{(6)} = (1,\omega^2,\omega,-1,-\omega^2,-\omega)$
6. Seküler denklem	$\lambda_6 = 1$	$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6$	$\chi^{(1)} = (1,1,1,1,1,1\,)$
	$\lambda_6 = -1$	$y_1 = y_2 = y_3 = -y_4 = -y_5 = -y_6$	$\chi^{(4)} = (1,1,1,-1,-1,-1\,)$
	$\lambda_6 = \omega$	$\omega\, y_1 = y_5 \quad \omega\, y_2 = y_6 \quad \omega\, y_3 = y_4$ $\omega\, y_4 = y_2 \quad \omega\, y_5 = y_3 \quad \omega\, y_6 = y_1$	$\chi^{(3)} = (1,\omega^2,\omega,,1,\omega^2\omega)$
	$\lambda_6 = \omega^2$	$\omega^2\, y_1 = y_5 \quad \omega^2\, y_2 = y_6 \quad \omega^2\, y_3 = y_4$ $\omega^2\, y_4 = y_2 \quad \omega^2\, y_5 = y_3 \quad \omega^2\, y_6 = y_1$	$\chi^{(2)} = (1,\omega,\omega^2,1,\omega,\omega^2)$
	$\lambda_6 = -\omega$	$\omega\, y_1 = -y_5 \quad \omega\, y_2 = -y_6 \quad \omega\, y_3 = -y_4$ $\omega\, y_4 = -y_2 \quad \omega\, y_5 = -y_3 \quad \omega\, y_6 = -y_1$	$\chi^{(6)} = (1,\omega^2,\omega,-1,-\omega^2,-\omega)$
	$\lambda_6 = -\omega^2$	$\omega^2\, y_1 = -y_5 \quad \omega^2\, y_2 = -y_6 \quad \omega^2\, y_3 = -y_4$ $\omega^2\, y_4 = -y_2 \quad \omega^2\, y_5 = -y_3 \quad \omega^2\, y_6 = -y_1$	$\chi^{(5)} = (1,\omega,\omega^2,-1,-\omega,-\omega^2)$

Tablo 8. C_{3i} nokta grubu için karakter tablosu

C_{3i}	E	C_3	C_2	I	S_6^5	S_6
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
$\chi^{(3)}$	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω
$\chi^{(4)}$	1	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	1	ω	ω^2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
$\chi^{(6)}$	1	ω^2	ω	-1	$-\omega^2$	$-\omega$

4. SONUÇ

Farklı kristal sistemlere ait olan D_{2d} ve C_{3i} nokta gruplarına ait karakter tabloları alternatif bir yöntem olan sınıf toplamı yaklaşımı ile elde edilmiştir. Öncelikle ilgili nokta grubunun sınıfları elde edilmiştir. Sınıfı oluşturan elemanların toplanmasıyla elde edilen sınıf toplamları kullanarak sınıf toplamlarının çarpım tablosu oluşturulmuştur. Bu tablolardan sınıf toplam tersinin dağılımını veren $c_{j\bar{k}l}$ katsayıları elde edilmiştir. Bu katsayılardan hesaplanan $c_{lj\bar{k}}$ katsayıları her bir sınıf toplamına karşılık gelen seküler denklemde yerine yazılıp çözülerek özdeğer ve özvektörler hesaplanmıştır. Hesaplanan özvektörler kullanılarak grupların karakter tablosu yeniden oluşturulmuştur.

KAYNAKÇA

Bradley, C.J. & Cracknell, A.P. (1972). The Mathematical Theory Of Symmetry In Solids, Clarendon Press, Oxford.

Cornwell J.F. (1997). Group Theory in Physics, Academic Press, London.

Cox D. (2004). Galois Theory, Wiley and Sons İnterscience.

Dresselhaus, M.S.(2002). Applications Of Group Theory To The Physics Of Solids, Sprıng, Berlin.

Duffey, G.H. (1992). Applied Group Theory, For Physicists and Chemists, South Dakota State Unıversity, Brookings.

Feynman R.; Leighton R.; Sands M., (2016). The Feynman Lectures on Physics Volume I, Basic Books, New York.

Inui, T.; Tanabe, Y.; Onodera, Y. **(**1990). Group Theory and Its Applications in Physics**,** Springer, Tokyo.

Killingback, J. (1973). The class sum operator approach for the point group O and D4, Jornal of Mathematical Physics, 14 (2): 185-187.

Killingbeck, J. (1972). Group algebras and tensor operators, Journal of Mathematical Physics,5: 1131-1137.

Koster G. F. (1957). Space Groups And Their Representations, Academic Press, America.

Nussbaum A.(1971). Applied Group Theory, Prentice-Hall INC, USA.

Rudin R. (1972). Sufficient Conditions for Construction of the Character System of a Finite Group, AJP, 41: 490-494.

Stewart, I. (2007). Why Beauty is Truth: A History of Symmetry, Basic Books, New York.

Stewart I. (2014). Galois Theory, Chapman and Hall Book, New York.